

# LES MODÈLES RÉDUITS ET LES MODÈLES ANALOGIQUES POUR REPRÉSENTER LES PHÉNOMÈNES MAGNÉTO-TELLURIQUES

G, GRENET

*Université d'Istanbul Institut de Géophysique*

Avant d'entrer dans le sujet il me semble utile d'exposer très sommairement en quoi consiste la méthode de prospection magnéto-tellurique.

Il existe des perturbations naturelles du champ magnétique terrestre dans une gamme de période extrêmement étendue, depuis des années, des jours, des heures, des secondes jusqu'aux ondes radio-électriques. Naturellement ces perturbations électromagnétiques induisent des courants électriques dans le sol et ces courants pénètrent d'autant moins profondément que le sol est plus conducteur et que la période est plus faible.

Vous savez que dans le cas simple d'un conducteur plan de grande dimension un courant alternatif voit son amplitude diminuer de  $1/e$  lorsque la distance à la surface augmente de  $h = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$   $\omega$  étant la pulsation,  $\mu$  la perméabilité magnétique,  $\sigma$  la résistivité, (Ceci en unités dites «rationalisées»,)

Voici calculées par GAGNIARD quelques valeurs de  $h$  appelé profondeur de pénétration en fonction de la résistivité et de la période  $T = 2\pi/\omega$  pour  $\mu = \mu_0$  perméabilité du vide,  $Q$  étant exprimé en ohm-cm,  $h$  en km.

$Q/T$	<i>1 sec.</i>	<i>1 minute</i>	<i>10 minutes</i>
0,2	0,225	1,24	5,51
10	1,59	12,3	39
250	7,95	61,6	195
5000	35,6	276	872

Dans ce cas<sub>5</sub> on sait que le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique. Si la résistivité est constante, le rapport du champ électrique au champ magnétique est égal à :

$$\frac{E}{H} = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{o } Q; \text{ on peut aussi écrire } Q = \frac{E}{H \omega \mu})$$

La méthode de prospection magnéto-tellurique consiste à mesurer à la surface du sol le champ tellurique et le champ magnétique dans deux directions perpendiculaires«

La quantité  $QA = \frac{E^2}{H^2 \omega \mu}$  qui est égale à la résistivité réelle pour un sol uniformément conducteur<sup>^</sup> peut être calculée pour n'importe quelle station où l'on effectue une observation«

GAGNIARD appelle cette quantité QA résistivité apparente; il propose de rechercher à partir des valeurs ainsi trouvées quelle est la répartition réelle des résistivités en fonction de la profondeur.

On peut montrer par des exemples simples que cette notion de résistivité apparente donne effectivement des renseignements sur les variations de la résistivité réelle en fonction de la profondeur«

Mais dans d'autres cas la résistivité apparente n<sup>5</sup>a pas grande signification.

Dans tous les cas il est nécessaire de trouver une répartition des résistivités en fonction de la profondeur qui puisse expliquer les résultats observés.

On sait que pour résoudre des problèmes difficilement accessibles par le calcul«, on a recours à des modèles réduits ou à des modèles analogiques. Dans le premier cas on étudie le même phénomène<sub>f</sub> mais en réduisant P échelle d'une façon convenable« Dans le second cas on étudie un phénomène tout différent<sup>^</sup> mais régis par les mêmes équations.

Ces deux moyens peuvent être utilisés pour représenter les phénomènes magnéto-telluriques.

Etudions d<sup>5</sup>abord les modèles réduits.

Les phénomènes magnéto-telluriques sont naturellement régis par les équations de MAXWELL. Si on se limite au cas des ré«

gimes permanents de pulsation  $\omega$  on voit facilement que les équations ne sont pas changées si on multiplie les périodes par  $a_3$  les résistivités par  $a$  et les dimensions linéaires par  $a$ , la perméabilité  $\mu$  et le pouvoir inducteur spécifique  $s$  n'étant pas modifiés.

On a donc toujours le droit de réaliser un modèle de cette façon.

Si maintenant nous nous limitons au cas très fréquent où l'on peut négliger le «courant de déplacement» devant les courants de conduction on trouve facilement qu'il suffit de considérer l'équation  $h = \sqrt{2Q/\omega\mu}$  qui donne la profondeur de pénétration. Dans ce cas on peut multiplier les périodes par  $a/b_s$  les résistivités par  $a.h$  et multiplier les longueurs par  $a$ ; ce qui donne des possibilités plus grandes dans les réalisations. Mais si  $h$  est un peu grand il faut prendre garde à ce que dans le modèle le «courant de déplacement» ne devienne pas suffisant pour perturber les résultats.

On peut déjà construire des modèles en utilisant seulement la première relation. En effet, supposons qu'on veuille représenter des résistivités comprises entre  $0,2$  et  $5000$  ohm.m pour des périodes comprises entre 1 seconde et 10 minutes (600 secondes) et qu'on veuille représenter 1 km par 1 cm — le facteur de multiplication est  $10^{*3}$ ,

La plus faible résistivité sera  $0,2 \cdot 10^{-5}$  ohm, m, soit  $2,10^{-4}$  ohm, cm, la plus grande : 5 ohm.m; la plus faible période  $10^{-5}$  sec. la plus grande 600 sec. résistivités et périodes qu'il est possible de réaliser aisément.

On peut réaliser une sphère d'un diamètre d'un à deux mètres et chercher à représenter les diverses variations du champ magnétique terrestre« J'ai le projet de réaliser un tel modèle.

Mais ici je veux montrer comment on peut réaliser un modèle de dimensions modérées représentant le cas proposé par CAGNIARD où l'excitation est due à une nappe de courants horizontaux indéfinie ou à une cause plus lointaine équivalente,

T<sub>a</sub> MADDEN, du M.I.T. (communication privée), a essayé de tels modèles dans des cas où la solution était connue» Mais il n'obtenait pas la fermeture correcte des courants induits dans les modèles

et les résultats étaient qualitativement valables, mais non quantitativement.

Dans l'exemple Fig. 1, le rapport  $E/H$  variait bien à peu près comme il devait au passage de la faille, mais sa valeur n'était pas celle calculée.

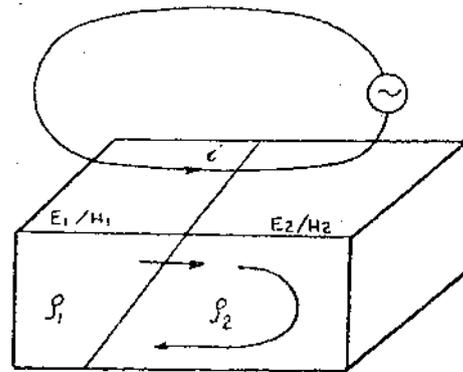


Fig. 1

#### Cas d'un substratum infiniment conducteur — Solution symétrique

Dans bien des cas pratiques il en est ainsi et souvent on peut supposer qu'à une distance assez grande il existe un substratum pouvant être considéré comme infiniment conducteur.

Dans le cas réel il est évident que les courants circulant dans le modèle vont être égaux et opposés au courant inducteur  $i$ . En effet, le champ magnétique dû à une nappe de courant de densité uniforme est  $i/2$ ; comme le champ magnétique est nul dans un corps infiniment conducteur il faut qu'il circule dans le sol un courant égal et de son contraire.

Il suffit, donc, de prendre un modèle assez long de produire une nappe de courant uniforme au moyen d'un grand nombre de fils parallèles alimentés par des courants égaux (Fig. 2) et de faire refermer tous ces courants dans le modèle.

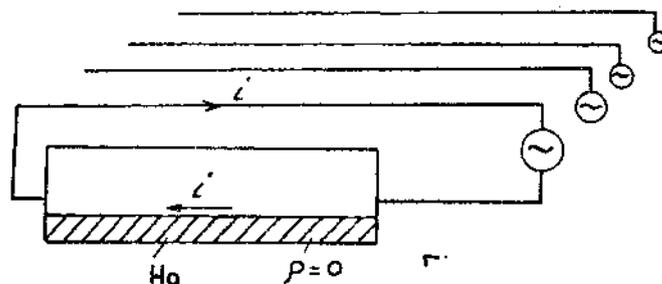


Fig. 2

Fig. 2

Ceci n'est évidemment pas très pratique.

Imaginons maintenant deux modèles de ce genre symétriques par rapport à un plan (Fig. 3).

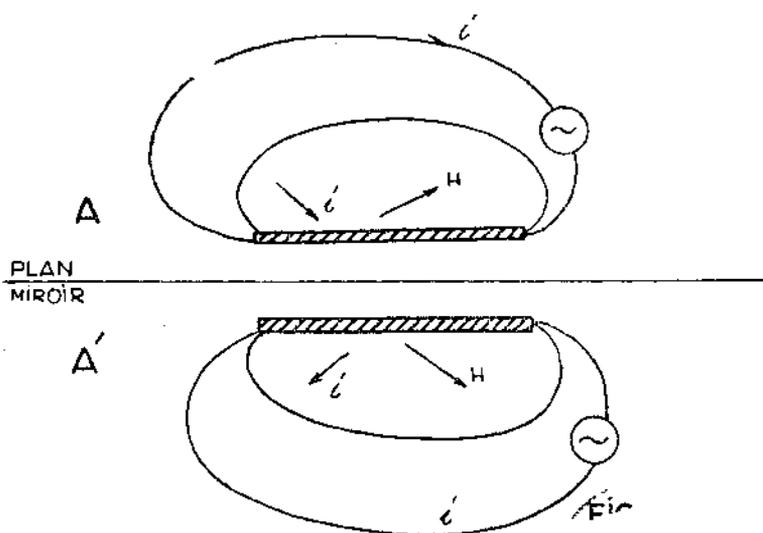


Fig. 3

Fig. 3

Si on désire que les champs magnétiques soient symétriques par rapport à ce plan, il faut, et il suffit, que les courants inducteurs soient symétriques, mais de sens inverse. L'examen des équations de MAXWELL le montre. Mais on le comprend immédiatement en examinant les champs produits par des courants rectilignes ou circulaires. Prenons deux spires circulaires symétriques; si elles sont parcourues par des courants de sens contraire, les champs magnétiques produits sont symétriques.

Donc, les deux modèles  $A$  et  $A'$  pouvant être réalisés comme indiqués sur la figure

Mais le long du substratum infiniment conducteur, le potentiel est constant et le courant qui circule de la partie non infiniment conductrice à la partie infiniment conductrice a une composante parallèle au plan de sens contraire et une composante perpendiculaire à ce plan de même sens pour chacun des modèles symétriques. Donc, si nous accolons les deux modèles en supprimant le substratum infiniment conducteur rien ne sera changé (Fig. 4). On pourra même couper les conducteurs en  $M$  et  $N$ , car il ne passe aucun courant en ces points.

On peut, alors, au lieu d'une nappe de conducteurs, dans lesquels on envoie des courants identiques, utiliser un solénoïde (Fig. 5).

Naturellement, toujours en prenant des modèles symétriques, on peut ne pas utiliser une excitation par une nappe uniforme.

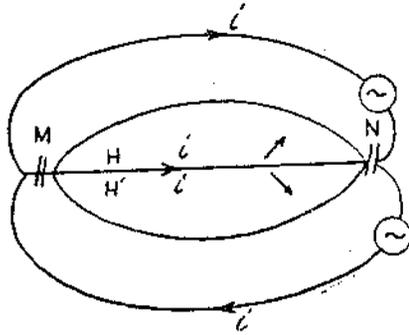


Fig. 4

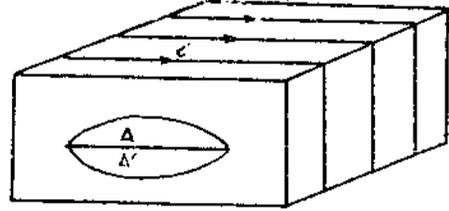


Fig. 5

On peut simuler un électrojet en utilisant un seul conducteur dont on peut varier la distance au modèle\*

A cause des effets de bords, un tel modèle ne sera utilisable que vers son centre, mais il sera possible dans cette région de disposer des accidents aussi compliqués que Ton désire; on pourra même utiliser des modèles où la résistivité n'est pas isotrope.

En ce qui concerne ces modèles réduits,, il s'agit de projets dont la réalisation est en cours à P'institut de Physique du Globe de Paris, Je veux maintenant décrire des modèles analogiques résistance-capacité qui ont été construits sous la direction de TV MADDEN du M.I/T. à Boston.

Considérons un trièdre  $Oxyz$ ,  $xOz$  représentant le sol,  $Oz$  la verticale vers le bas« Limitons-nous aux seuls cas que Ton puisse traiter au moyen de ces modèles, qui sont les cas où le problème se réduit à deux dimensions\* Il faut même particulariser un peu plus et supposer que la résistivité est seulement fonction de  $x$  et de  $z$ , que toutes les dérivées par rapport à  $y$  sont nulles et que soit les courants soit les champs magnétiques sont parallèles à  $Oy$ «

Bien e&tendu nous supposons les courants de déplacements négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, en

→                    -\*                    ⇔

introduisant un potentiel vecteur  $A$  tel que  $dA/\delta t = E^{\wedge}$  on peut écrire les équations de MAXWELL sous les formes équivalentes ci-après :

$$\begin{aligned} \text{rot } B + \text{rot } A &= 0 & E &= -\text{grad } \phi - \dot{A} \\ \text{rot } H &= j & B &= \text{rot } A \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{grad } \text{div } A - \Delta A &= j \\ \text{rot } \text{rot } A &= j \end{aligned}$$

Premier cas» — Le champ inducteur réel est constitué par une nappe de courant indéfinie parallèle à  $Oz$ . Les champs magnétiques sont alors parallèles à  $Oy$  et les courants induits parallèles au plan  $xOz$  (Fig. 6).

Les équations de MAXWELL écrites sous la forme  $B$  se réduisent à :

$$d\{iH\}dt + doi_z/dz \sim dQ\{z/dx = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$- dH/dz = i_x \dots \dots \dots (2)$$

$$dH/dx = i_z \dots \dots \dots (3)$$

Considérons maintenant un plan infiniment conducteur  $xOz$  au potentiel  $0$  et sur ce plan un plan voisin ayant une résistivité superficielle par carré  $R$  et une capacité  $C$  par unité de surface. Soit  $U(x \wedge z)$  le potentiel d'un point de ce plan\*

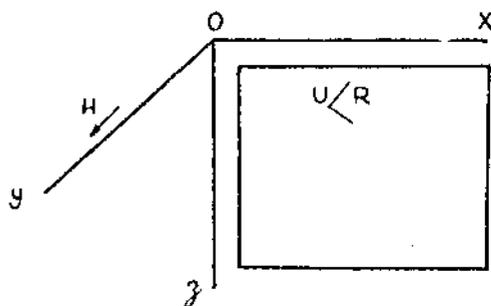


Fig. 6

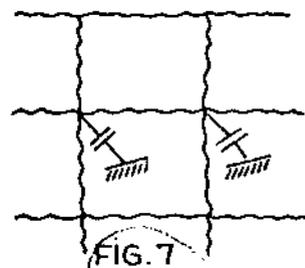


Fig. 7

Je vais montrer que  $U$  peut représenter  $H^{\wedge} - dujdz$  représentant  $i_x$ ,  $dU/dz$  représentant  $i_z$ .

Ceci à conditions que Fon ait :

$$R_o = jx/C = \text{constante} = R_o Q_o = ji_o / C_o$$

Les équations (2) et (3) sont naturellement satisfaite par cette représentation«

Voyons comment l'équation (1) est satisfaite en remplaçant  $H$  et  $i$  par les valeurs images» Il vient

$$dQ\ddot{U}/dt - d\{dz \ll Q \ll dUjdz - d\{dx \cdot Q \cdot dU\}dx = 0$$

remplaçons  $\{i$  par  $\{x_o/C_o$  «  $C$  et  $Q$  par  $R_o Q jR$  et divisons tout par  $\{i_o/C_o = I?_o \cdot Q_o$ , il vient:

$$d\{CUI\}dt - \{d\{ \cdot \frac{1}{R} - dU/dz - d\{dx \ll \frac{1}{R} \ll dU\}dx = 0$$

si  $j$  est la densité de courant dans le plan image on a :

$$j_x^* = -l/R \frac{dU}{dx}, \quad j_z = -ljR \frac{dU}{dz} \text{ on a donc :}$$

$$CdU/dt + dj_z/dz + dj_x/dx = 0$$

Cette équation exprime simplement que les variations de la charge du plan résistant sont liées aux variations de courant, c'est une identité. L'équation (1) est donc satisfaite, ce qui prouve que l'image analogique est bien correcte.

Second cas, — La nappe de courant inductrice est parallèle à  $Oy$ . Dans ce cas les vecteurs  $\mathcal{E}$  et  $E$  sont dirigés suivant  $Oy_3$  et  $H$  et  $B$  sont parallèles au plan  $xOz$ .

On peut prendre un plan résistant analogue au précédent et chercher une analogie.

On démontre facilement que le vecteur égal à  $U$  dirigé suivant  $Oy$  représente le potentiel vecteur  $A$ .

$$U \text{ représente } A, \quad dU/dz \text{ représente } E = Q \cdot i$$

$rot W$  représente  $B = -\nabla \times \mathcal{A} = -dU/dz$  représente  $B_x$ ,  $dU/dx$  représente  $B_z$ . Les lignes équipotentiels représentent les lignes d'induction.

Pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on ait les relations :

La démonstration est analogue à celle du premier cas.

Ces analogies ont aussi été utilisées pour étudier l'induction dans des encoches de machine électrique en faisant varier  $R$ .

Dans le cas magnéto-tellurique :  $i$  est toujours à peu près égal à  $i_0$  donc dans le premier cas  $C$  doit rester constant et  $JR$  doit varier comme  $1/Q$ . Dans le second cas, c'est l'inverse qui se produit :  $R$  doit rester constant et  $C$  doit varier comme  $1/\zeta$ .

T<sub>a</sub> MADDEN<sub>j</sub> au M.I.T. de Boston, a dirigé un travail sur des modèles légèrement différents dans lesquels on utilise des réseaux résistance-capacité à chaque noeud se trouve une capacité reliée au sol.

Mathématiquement cela revient à remplacer les équations différentielles par des équations aux différences et il faut s'assurer que cela n'introduit pas d'erreur trop importante\*

Nous construisons également de tels réseaux à l'Institut de Physique du Globe de Paris<sup>8</sup>

En plus du fait que ces réseaux permettent de représenter des phénomènes difficiles à traiter par le calcul<sup>^</sup> ils permettent souvent de mieux comprendre les phénomènes magnéto-telluriques\*

Prenons l'exemple de l'effet dit «de bord de mer» souvent mal compris.

Pour une période de 20 secondes et une résistivité de 0,20 ohm.m pour la mer et de 100 ohm.m pour la terre, les profondeurs de pénétration sont respectivement 1 km et 23 km\*

Examinons le second cas, c'est-à-dire le cas de courants parallèles à Oy<sup>«</sup>

Pour simplifier<sup>^</sup> supposons (ce qui n'est pas le cas) l'océan de profondeur infinie et limitée par le plan yOz (Fig. 8).

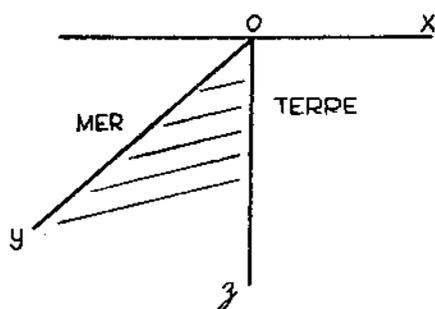


Fig. 8

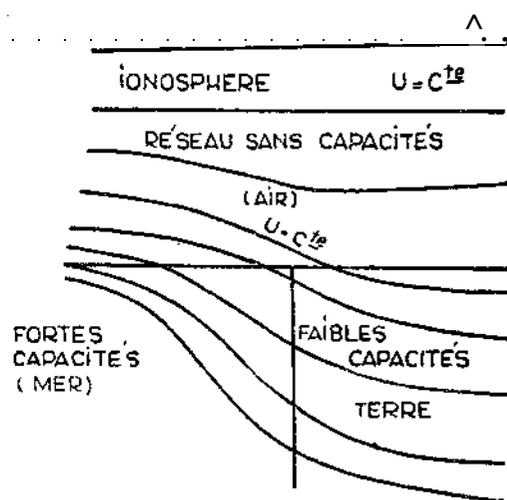


Fig. 9

Dans le réseau image les résistances sont partout égales<sup>«</sup> Les capacités proportionnelles à la conductibilité<sup>^</sup>, sont donc beaucoup plus grandes pour représenter la mer que la terre de plus grande résistivité.

Au niveau de l'ionosphère le champ magnétique est constant<sup>«</sup> Nous pouvons, donc, le représenter par une surface équipotentielle\*. Les fortes capacités de la partie gauche du réseau vont créer un appel de courant faisant remonter les surfaces équipotentielle<sup>«</sup>

tentielles qui vont se trouver resserrées à cause du fort gradient créé par cet appel de courant.

Ces équipotentielles représentent les lignes d'induction<sub>3</sub> le potentiel représentant  $g i$  dans le terrain. On voit immédiatement que parallèlement à la côte les courants induits dans la mer se trouvent augmentés et que près du rivage il se manifeste une composante verticale des perturbations magnétiques. Le courant tellurique dans la terre se trouve au contraire diminué lorsqu'on se rapproche de la mer.

On peut arriver à se représenter ce phénomène en considérant les courants induits dans le sol, mais le résultat est moins immédiat que par l'examen du modèle analogique.

Je me suis limité aux principes généraux; les applications demandent énormément de soin et d'attention,\* mais c'est un travail attrayant et instructif.